GRAPÍ VILUMARA, P.; MASSA ESTEVE, M.R. (ed.) (2011), *Actes de la VI Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*. Barcelona, SCHCT-IEC, p. 53-60.

LA TRIGONOMETRIA A LA MATEMÀTICA DE L'ANTIGA ÍNDIA. ALGUNES IDEES PER TREBALLAR A L'AULA

Carles PUIG-PLA[1]; Iolanda GUEVARA CASANOVA[2];
Fàtima ROMERO VALLHONESTA[3]; Maria Rosa MASSA ESTEVE[1]
[1]Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica. Universitat Politècnica de Catalunya
[2]Institut Badalona VII
[3]Inspecció d'Educació. Generalitat de Catalunya

Paraules clau: *matemàtiques a l'antiga Índia, trigonometria, Aryabhatiya, Aryabhata, siddhanta, Bhaskara I*

Trigonometry in Ancient India Mathematics. Some ideas to work in the classroom

Summary: *From mathematical texts of ancient India we can get closer to the origins of trigonometry and we can design proposals for activities in the classroom for fourth year students in the ESO. Specifically, the oldest treatise of the genre "Siddhanta" which has been preserved, the* Aryabhatiya *of Aryabhata* (*499*)*, commented by Bhaskara I* (*629*)*, offers this possibility and allows students to see the universal value of mathematics.*

Key words: *Mathematics in Ancient India, trigonometry, Aryabhatiya, Aryabhata, siddhanta, Bhaskara I*

Introducció

Quan es parla de matemàtiques a l'Antiga Índia (aprox. 2500 aC-500 dC), es fa referència a les que es van desenvolupar a la regió que actualment està constituïda per l'Índia, el Nepal, el Paquistan, Bangladesh i Sri Lanka, que queda separada de la resta del continent asiàtic per la barrera física que suposa el massís de l'Himàlaia, i que sovint es denomina subcontinent indi.

Una de les contribucions més importants de l'Índia en la història de la matemàtica va ser la introducció de les taules de "mitges cordes", antecedent immediat del que actualment coneixem com a "sinus", per a substituir les taules de cordes gregues (Boyer, 1986: 279). Tot i que en alguns tractats antics d'astronomia ja hi havia taules de mitges cordes basades possiblement en el treball de cordes de *l'Almagest de* Ptolemeu[1] (aprox. 85-165), no és fins a l'*Aryabhatiya* (aprox. 499) d'Aryabhata que es pot trobar a la literatura oriental un tractat de matemàtica pura amb indicis del que ara anomenem sinus (Smith, 1925: 608). Precisament aquesta obra ens permet presentar una proposta d'activitat per a l'aula de 4rt d'ESO[2].

Els documents matemàtics més antics. *Sulbasutres* i *Siddhantes*

La dificultat de datar alguns textos i d'identificar-ne els autors fan de l'estudi de les matemàtiques de l'Antiga Índia un repte pels historiadors de la matemàtica. Cal afegir a aquestes dificultats que no va ser fins els anys 1921-1923 que es van trobar, a les ribes del riu Indo, les primeres restes de dos centres urbans, un a Harappa i l'altre a Mohenjo-Daro, del que s'anomenarà cultura Harappa (aprox. 2500 aC - 1700 aC), tot fent referència al primer assentament descobert. Les restes arqueològiques indiquen que aquesta civilització posseïa una àmplia cultura numèrica, un patró d'unitats de mesura de pes amb múltiples i submúltiples en base decimal, així com mesures de longitud molt precises, però no s'ha trobat cap document matemàtic (Joseph, 1996: 303-306).

Els primers documents on es troben vestigis de les matemàtiques de l'època cal cercar-los en el primer mil·lenni abans de la nostra era, especialment entre el segle VIII aC i el segle V aC dins de la literatura desenvolupada en sànscrit, concretament en els *sulbasutres* (regles o aforismes de les cordes) que son apèndixs dels Vedes (els textos sagrats de la religió dels pobles vèdics escrits en forma de versos curts –*sutres*-) en els quals es donen normes per a la construcció d'altars. Els *sulbasutres* no contenen cap demostració de les regles de cordes ni dels procediments geomètrics que utilitzen. Dels qui van escriure els *sulbasutres* només se'n coneixen els noms i alguna indicació aproximada de l'època en què van viure. El més antic és el de Baudhayana que es va escriure entre el 800 i 600 aC. Els *sulbasutres* contenen procediments per a la construcció de figures geomètriques com ara quadrats, rectangles, cercles, etc. i també descriuen mètodes aproximats per a la quadratura del cercle i conseqüentment aproximacions al nombre π (O'Connor & Robertson, 2000).

L'edat daurada de les matemàtiques índies i de la cultura sànscrita va tenir lloc durant l'anomenat període clàssic (400-1200). Cap a la meitat del primer mil·lenni de la nostra era va augmentar significativament el nombre de textos sànscrits d'astronomia (*siddhantes*), molt pocs dels quals han sobreviscut fins avui. La finalitat dels *siddhantes* era la d'identificar les posicions dels cossos celestes des d'un lloc d'observació i en un moment donat, corregir-les trigonomètricament d'acord amb les seves anomalies orbitals i utilitzar les posicions vertaderes resultants per predir quan tindria lloc un determinant esdeveniment astronòmic (sortida del sol, llunes noves o plenes, conjuncions, eclipsis, etc.) (Plofker, 2007: 399).

El tractat més antic classificat generalment com a *siddhanta* i que s'ha preservat completament és l'*Aryabhatiya*, compost el 499 per Aryabhata (n. 476). És una de les obres més importants i influents de l'astronomia i les matemàtiques a l'Índia, juntament amb *Brahma-sphuta-siddhanta* i *Khanda-khadyaka*, de Brahmagupta (n. 598 aprox.). Aquest tipus de tractats foren comentats posteriorment per a garantir la comprensió de les regles que s'hi enunciaven. Tot seguit analitzarem el comentari de l'*Aryabhatiya*, fet pel matemàtic conegut com a Bhaskara I (629).

---

1 Més informació a Massa & Romero (2003).

2 Aquest treball s'emmarca dins del projecte del Grup d'Història de les Matemàtiques de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM) que duu per títol "El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions", un dels objectius del qual és la investigació de l'evolució històrica dels conceptes trigonomètrics, l'anàlisi de textos originals i el disseny d'activitats per a ser utilitzades a l'aula. El grup pertany a l'Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Barcelona i els seus membres són: M. Rosa Massa Esteve, Fàtima Romero Vallhonesta, Iolanda Guevara Casanova, Carles Puig-Pla, Francisco Moreno Rigall i M. Àngels Casals Puit.

L'*Aryabhatiya* d'Aryabhata amb els comentaris de Bhaskara I

El segon capítol de l'*Aryabhatiya*, dedicat a les matemàtiques (*ganita*), està constituït per 33 versos en una mètrica anomenada *arya*. En molt poc espai i en versos curts i críptics es condensava el coneixement matemàtic. A banda de la salutació i justificació inicial, es fa una defensa de la notació posicional, s'introdueixen procediments geomètrics i aritmètics, càlcul d'àrees i volums i l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques. També es calcula l'àrea del cercle amb dues aproximacions de π, com a $\sqrt{10}$ i com 62832/ 20000. S'hi pot trobar el càlcul de l'altura i la distància a un focus de llum amb l'ombra de dos gnòmons o altres temes com ara: la suma de nombres naturals, de quadrats i de cubs; el càlcul dels interessos produïts per un capital, i també mètodes de resolució d'equacions de primer grau, quadràtiques i indeterminades de primer grau (Keller, 2005: 279-280).

Tanmateix, aquí volem destacar que el text conté el càlcul de "mitges cordes" (sinus). Hi apareix la construcció geomètrica i el càlcul d'una taula del sinus per a valors del 1r quadrant. Aquesta secció ens ha interessat especialment perquè el raonament geomètric visual que s'utilitza per a calcular la taula ens ha semblat adequat per a reproduir-lo a l'aula a l'hora d'estudiar les raons trigonomètriques i les seves mesures.

El text analitzat comença amb el vers 11 del capítol 2 de l'*Aryabhatiya* i continua amb comentaris de Bhaskara I. El vers diu:

> S'ha de dividir la quarta part de la circumferència d'un camp uniforme circular. A partir de trilaterals [triangles] i quadrilaterals [rectangles], es poden construir damunt del semidiàmetre tantes mitges cordes, associades a un nombre parell d'arcs unitaris, com es desitgi.[3]

Bhaskara I, el comentarista, introdueix la pregunta següent i la desenvolupa àmpliament fins a contestar-la:

Quina és la mida de les mitges cordes quan el semidiàmetre és Vasu (8)-Fire (dahana 3)-Krta (4)-Fire (hutasana 3)? [radi = 3438 unitats].[4]

El que ara s'entén per sinus d'un angle, en aquests textos s'anomena "mitja corda", que és la meitat de la corda de l'angle doble. En el dibuix està marcat l'angle α i la "mitja corda" de l'angle α (vegeu Fig. 1).

I segueix tota la seva explicació:

> És més, té sentit dir que un arc unitari pot ser igual a la seva corda; qualsevol ho sap; que un arc pugui ser igual a la seva corda ha estat molt criticat precisament per aquest mestre.

3 La traducció al català és dels autors a partir del text en anglès (Plofker, 2007).

4 Com a mesura del radi es pren la mesura de l'angle d'1 radià expressada en minuts que és, aproximadament, 3438. Aquest valor probablement no és original d'Aryabhata. Sembla que ja el feia servir Hiparc (aprox. 190-120 aC) (Toomer, 1970-1990: 208).

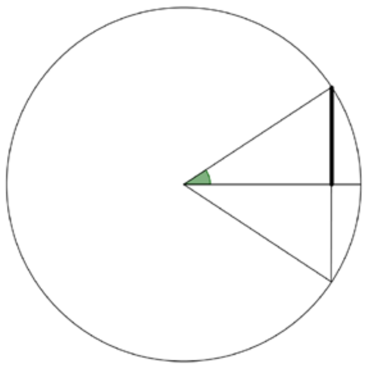

Fig. 1. Relació entre mitja corda i sinus d'un angle.

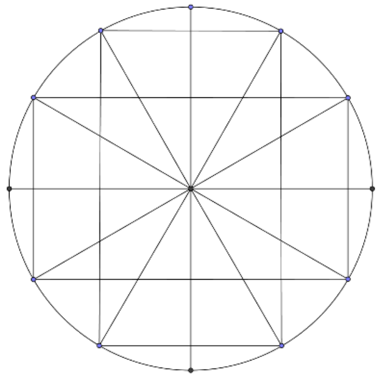

Fig. 2. Dibuix de la mandala. (Keller, 2006:14; Plofker, 2007: 409).

Però diem: Un arc igual a la corda existeix. Si un arc no pot ser igual a la seva corda mai hi hauria regularitat en absolut per una bola de ferro damunt el terra pla. Per tant deduïm que hi ha algun punt per mitjà del qual aquesta bola de ferro es reclina sobre el terra pla. Aquest punt és la 96ena part de la circumferència.[5]

Procediment: Dibuixant un cercle (mandala) amb un parell de compassos d'obertura igual al semidiàmetre de mida tant gran com es vulgui, es pot dividir aquest cercle en 12 parts iguals. Aquestes dotze parts es prenen com a *rasis* (marques[6]). Ara, un cop el cercle està dividit en 12, a l'est es pot fer una línia que té la forma d'una corda, i que penetra en el cercle des dels extrems de dues *rasis* (marques) del sud cap al nord. El mateix a l'oest. De la mateixa manera al sud i al nord podem fer cordes de l'est cap a l'oest. De la mateixa manera podem fer línies des de l'est, l'oest, el sud i el nord que penetren en el cercle des dels extrems de quatre *rasis* (marques). Es poden obtenir trilaterals dibuixant les diagonals del rectangles obtinguts (Fig. 2).

Així s'obté un camp produït per una circumferència. S'ha dibuixat amb un parell de compassos amb un bastó subjecte a l'obertura. En el camp dibuixat d'aquesta manera tot s'ha de mostrar.

En aquest dibuix, quan l'arc unitari és mig *rasi* (15º), la corda sencera de quatre arcs unitaris (60º) és igual al semidiàmetre. La meitat és "la mitja corda" de dos unitaris (30º). I això és 1719[7] que correspon a la base (Fig. 3). El semidiàmetre és la hipotenusa i, per tant, la perpendicular és l'arrel quadrada de la diferència dels quadrats de la base i de la hipotenusa. Això és exactament la "mitja corda"[8] de quatre arcs unitaris (60º). Aquest valor és 2978.

---

5 Fent això, l'arc unitari té 90º/24 = 3º 45'o el que és igual 225'.

6 La mesura d'aquestes particions o rasis del cercle és 30º.

7 És la meitat del radi o semidiàmetre que era 3438. Correspon a ½ que és el valor que s'assigna actualment als sinus de 30º.

8 Per a nosaltres el sinus.

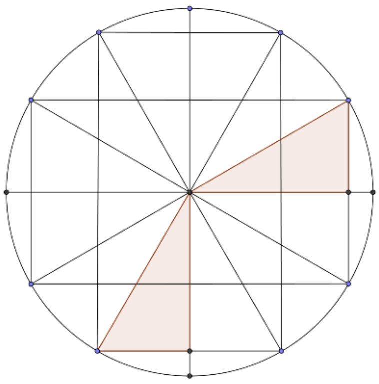

Fig. 3. En el dibuix: la base del triangle inferior és mitja corda de 2 unitaris (sinus de 30º). Un cop calculada l'altura a patir de la base i de la hipotenusa, en el triangle superior s'observa que aquesta altura ara és la mitja corda de 4 unitaris (sinus de 60º).

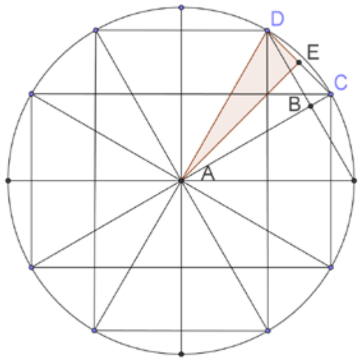

Fig. 4. BC = 460. En el triangle DBC, BD = "mitja corda" (sinus) de 2 unitaris (30º) = 1719. DC és la hipotenusa i es calcula (1870). Però alhora DC és la corda de 2 unitaris, per tant la meitat (890) és la "mitja corda" d'un arc unitari, el sinus de 15º.

Quan es resta aquesta quantitat del semi-diàmetre[9], el resultat (460) és la sageta (sinus versus) de la "mitja corda" de dos arcs unitaris (30º). La hipotenusa és l'arrel de la suma dels quadrats de "mitja corda" de dos arcs unitaris (30º) i la sageta (Fig. 4). I aquesta, la hipotenusa, és la corda de dos arcs unitaris, que és 1780. La meitat (890) és la "mitja corda" d'un arc unitari (15º) per tant, el sinus de 15º. (Plofker, 2007: 407-408; 2009: 136-139; Keller, 2006b: 1, 57-64; 2,54-69)

Els 24 sinus d'Aryabhata són: 225, 449, 671, 890, 1105, 1315, 1520, 1719, 1910, 2093, 2267, 2431, 2585, 2728, 2859, 2978, 3084, 3177, 3256, 3321, 3372, 3409, 3431, 3438.[10] El primer d'aquest valors dels sinus és igual al seu arc (està comptat en minuts). És el que defensa Bhaskara I amb un argument físic quan diu que hi ha un arc igual a la seva corda quan es divideix per 96 tota la circumferència. Segurament els calcula a partir de consideracions sobre rectangles i triangles com fa Bhaskara I en les seves descripcions. Evidentment assumeix la bisecció de cada *rasi* (signe zodiacal o trenta graus), per obtenir "arcs unitaris"de 15º. Bahaskara I els subdivideix de nou per arribar als 24 d'Aryabhata (Plofker, 2007: 408-409).

Proposta per a una activitat a l'aula

La proposta d'activitat reprodueix els comentaris de Bhaskara, primer la construcció geomètrica i després les deduccions i la situaríem a 4t d'ESO o 1r de Batxillerat. Consisteix en la construcció

9 És a dir, 3438-2978=460.

10 En aquesta sèrie 890 correspon al de 15º, 1719 a 30º, 2431 (45º), 2978 (60º), 3321 (75º), 3438 (90º).

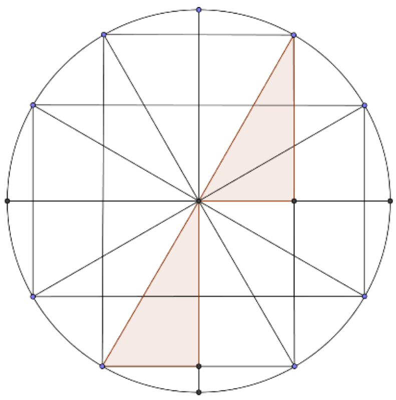

Fig. 5. Trilaterals emprats per Bhaskara I.

geomètrica amb el programa GeoGebra[11] i la deducció dels sinus dels angles de 60º, 30º i 15º emprant la figura construïda[12].

1. Per guiar l'alumnat en la construcció geomètrica proposem escriure les instruccions de manera semblant a com estan escrites en el text d'Aryabhata i en els comentaris de Bashkara I. Els alumnes obtindran la mandala de la figura 2.

2. Per tal que l'alumnat dedueixi els sinus dels angles de 60º, 30º i 15º, proposem la següent seqüència d'instruccions:

- a) Observeu els 12 arcs en que ha quedat dividida la circumferència, i digueu quant valen els angles corresponents.
- b) Localitzeu els 4 triangles del dibuix que tenen per costats els radis de la circumferència i ombregeu-los amb color. Quant mesuren els seus angles? Quant amiden els costats d'aquest triangles? Tenint en compte les mides dels seus costats, de quin tipus són aquests triangles?
- c) A la figura 3, cadascun dels triangle ombrejats té un angle de 90º. Com s'anomenen aquest tipus de triangles? Quant mesuren els altres angles? Quant amida el costat més petit? A partir de la definició de sinus i de les mesures anteriors, calculeu el sinus de 30º
- d) A la figura 5, els dos triangles ombrejats tenen un angle de 90º. Quant mesuren els altres angles?
- e) A partir de la definició de sinus i de les mides obtingudes a l'apartat c), deduïu el sinus de 60º.
- f) En la figura 4, si E és el punt mig del segment DC, quant mesuren els angles del triangle AED?
- g) Recopileu alguns dels valors obtinguts fins ara en els apartats c) i e)
  AD = AC = BD = AB =
  i calculeu BC.
- h) El triangle DBC és rectangle en B. Tenint en compte els valors de BC i BD, calculeu DC i DE.

11 Software lliure de geometria dinàmica.

12 És convenient que el radi del cercle es prengui com a unitari per tal de treballar amb els valors actuals dels sinus.

- Amb les mesures anteriors deduïu el sinus de 15º.

Consideracions finals

Dins del projecte del grup d'història d'ABEAM, *El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions*, la introducció de l'estudi de la trigonometria a la matemàtica de l'Antiga Índia ajuda a tenir una panoràmica del desenvolupament de la trigonometria en diferents civilitzacions.

Coneixem, en general, molt poc sobre cultures no europees i és relativament recent la divulgació de la seva història quan es parla d'història de les matemàtiques. En aquest sentit George Gheverghese Joseph va ser un precursor quan el 1991 va publicar *The crest of the peacock.*[13] Posteriorment, diverses autores han estudiat més detingudament les Matemàtiques Índies, Keller (2005, 2006a i 2006b) i Plofker (2007, 2009) entre d'altres. En aquesta comunicació, aquest textos han estat la nostra font principal a l'hora d'estudiar la matemàtica a l'Antiga Índia que es conserva en sànscrit.

Dins de la matemàtica a l'Antiga Índia ens hem centrat en el *siddhanta* d'Aryabhata, l'*Aryabhatiya* (499), amb els comentaris de Bhaskara I (629) i hem parat atenció en el vers 11 del capítol 2 i en les reflexions que introdueix Bhaskara I. Aquest text ens ha interessat especialment perquè el raonament geomètric visual que utilitza per a calcular una taula de sinus per angles del primer quadrant, és adequat per reproduir-lo a l'aula a l'hora d'estudiar les raons trigonomètriques.

L'exemple presentat té interès des del punt de vista didàctic perquè combina raonament geomètric visual i trigonometria i, des d'un punt de vista més general, perquè mostra el valor universal de les matemàtiques i com aquestes es desenvolupen en diferents cultures.

13 La traducció al castellà: *La cresta del pavo real* és del 1996.

Bibliografia

BOYER, C. (1986), *Historia de la matemática,* Madrid, Alianza Universidad Textos, Editorial, S.A.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F. (2000), «Los Sulbasutras de la India», MacTutor History of Mathematics Archive [traducció de Jaime Berenguer (2007): http://www.astroseti.org/imprime.php?num=4585 (11/05/2010)

JOSEPH, G. G. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Madrid, Editorial Pirámide.

KELLER, A. (2005), «Making diagrams speak, in Bhaskara I's commentary on the *Aryabhatiya*», *Historia Mathematica,* 32, 275-302.

KELLER, A. (2006a), «Textes écrits, textes dits dans la tradition mathématique de l'Inde médiévale»: http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Keller06_Inde/Keller_Inde.htm (11/05/2010)

KELLER, A. (2006b), *Expounding the Mathematical Seed: A Traslation of Bhaskara I on the Mathematical Chapter of the Aryabhatiya*, 2 vols., Basel-Boston-Berlin, Birkhäuser.

MASSA, M.R.; ROMERO, F. (2003), «De la geometria a la trigonometría: el teorema de Ptolemeu», A: BATLLÓ, J. [*et al.*] (ed.), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica,* Barcelona: SCHCT, 153-159.

PLOFKER, K. (2007), «Mathematics in India», A: KATZ, V. [(ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook*, Princeton and Oxford, Princeton University Press, 385-514.

PLOFKER, K. (2009), *Mathematics in India*, Princeton and Oxford, Princeton University Press.

SMITH, D.E. (1925), *History of Mathematics,* Dover Publications Inc., New York, Vol. 1, 601-633.

TOOMER, G.J. (1970-1990), «Hipparchus», *Dictionary of Scientific Biography*, A: GILLISPIE, C.C. (ed.), Charles Scribner's Sons, New York, 207-224.